18/5/20

Γενίκευση σε περισσότερες μεταβλητές

Η ίδια λογική μπορεί να γενικευθεί σε παραπάνω από μία μεταβλητές, ώστε αν:

$f = f(y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \ldots, x)$ ή

$f = f(y_i(x), y_i'(x), x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

: Ένα σύστημα εξισώσεων

Οι εξισώσεις Euler με περιορισμό/συνθήκη

Ας υποθέσουμε ότι ζητούμε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων πάνω σε μία επιφάνεια. Τότε προφανώς όλα τα σημεία της διαδρομής πρέπει να ικανοποιούν και την εξίσωση της επιφάνειας. Δηλ. θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε μια ποσότητα η οποία ικανοποιεί μια παραπάνω συνθήκη.

Έστω ότι $f = f(y, y', z, z', x)$ δηλ. μια συνάρτ. 2 μεταβλητών (και των παραγώγων τους) πολλαπλασιαστές Lagrange

και η συνθήκη
$$g(y, z, x) = 0$$
τι συνθήκη Lagrange θα γράφεται ως:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial a} \right] dx$$

Πλέον οι παράγωγοι $\frac{\partial y}{\partial a}$ και $\frac{\partial z}{\partial a}$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και δεν μπορεί να ισχύει η Εξίσωση Euler (για $a=0$) για τις δύο μεταβλητές. Αντίθετα συνδέονται με τη σχέση / συνθήκη:
$$g(y, z, x) = 0$$

Όμως:
$$\frac{dg}{da} = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

Προσοχή! $\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} = 0$ γιατί $\frac{\partial x}{\partial a} = 0$!

Επίσης:
$$\begin{cases} y(x, a) = y(x) + a\eta_1(x) \\ z(x, a) = z(x) + a\eta_2(x) \end{cases}$$

Άρα: $\frac{\partial g}{\partial y} \eta_1 + \frac{\partial g}{\partial z} \eta_2 = 0 \Rightarrow \eta_2 = -\eta_1 \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z}$

Δηλαδή

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \eta_1 \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right.$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right] \eta_1 \, dx$$

Δηλ. για να είναι $\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \eta_1$ πρέπει:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial z}$$

Έχουμε διαχωρίσει πλήρως τις μεταβλητές y, z. όμως όλα είναι συναρτήσεις του x. Δηλαδή, ισοδύναμα μπορώ να γράψω:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial y} = \lambda(x) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial z} = \lambda(x) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} - \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

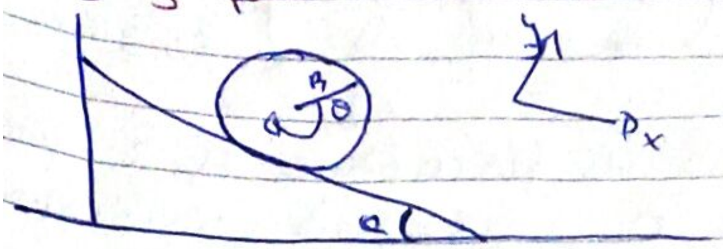
Ζητάμε αναλυτικά 3 συναρτήσεις $y=y(x)$, $z=z(x)$ και $\lambda=\lambda(x)$. Φαινομενικά έχω 2 εξισώσεις αλλά δεν πρέπει να ξεχάσουμε ότι: $g(y,z,x)=0$.
Η συνάρτηση $\lambda(x)$ καλείται και πολλαπλασιαστής Lagrange

Στη γενική περίπτωση που έχουμε παραπάνω από 2 μεταβλητές, δηλ $f = f(y_i, x)$ γράφουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_j \lambda_j(x)\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0$$

$$g_j(y_i, x) = 0$$

Παράδειγμα: Έστω δίσκος που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμμένο επίπεδο. Βρείτε τη συνθήκη περιορισμού.



Η απόσταση x που διανύει ο δίσκος είναι:
$x = R\theta$ και είναι η συνθήκη περιορισμού
Δηλ. $g(x,\theta) = x - R\theta = 0$

Η συνθήκη περιορισμού μπορεί επίσης να είναι σε ολοκληρωτική μορφή. Δηλαδή, έστω ότι ζητάμε την $y = y(x)$ για την οποία το συναρτησιοειδές

$$\boxed{J[y] = \int_a^b f(y, y', x)\, dx}$$

έχει ακρότατο με $y(a) = A$, $y(b) = B$ και επιπλέον το συναρτησιοειδές:

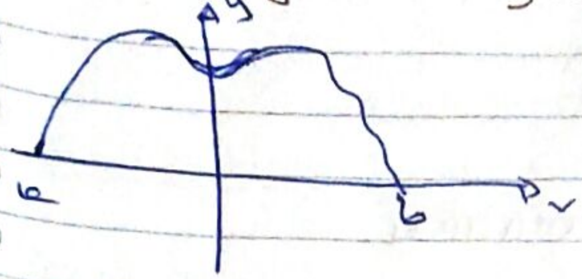
$$k[y] = \int_a^b g(y, y', x)\, dx$$

να είναι σταθερό. Τότε ζητάμε τη σταθερά λ για την οποία το $\int_a^b (f + \lambda g)\, dx$ έχει
το λ είναι σταθ.
ακρότατο. Τελικά μπορούμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα γίνεται:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0$$

με $y(a) = A$, $y(b) = B$ και $k[y] = l$ = σταθερά

Παράδειγμα Να βρεθεί η καμπύλη $y=y(x)$ μήκους ℓ που γράφεται από τον άξονα $x'x$ και εσωκλείει τη μέγιστη περιοχή. Σχηματικά



Δηλαδή ζητάμε τα ακρότατα του:

$$J[y]=\int_a^b y\,dx$$

Προφανώς $y(a)=y(b)=0$ και το μήκος της καμπύλης είναι: $K[y]=\int_a^b \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx=\ell$

Άρα:

$f(y,y',x)=y$, $\quad g(y,y',x)=\sqrt{1+(y')^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$, $\frac{\partial g}{\partial y}=0$, $\frac{\partial g}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$

Τελικά:

$$1-\lambda\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=0\Rightarrow\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=x-c_1$$

Δηλαδή:

$$\frac{\lambda^2(y')^2}{1+(y')^2}=(x-c_1)^2\Rightarrow\lambda^2(y')^2=(x-c_1)^2+$$

$$+(x-c_1)^2(y')^2\Rightarrow[\lambda^2-(x-c_1)^2](y')^2=(x-c_1)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y')^2=\frac{(x-c_1)^2}{\lambda^2-(x-c_1)^2}\Rightarrow dy\pm\frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}dx=0$$

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}+c_2\Rightarrow(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2$$

Όμως για τις τιμές που δώσαμε: $\begin{cases}x=a, & y=0\\ x=b, & y=0\end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l}(a-c_1)^2+c_2^2=\lambda^2\\(b-c_1)^2+c_2^2=\lambda^2\end{array}\right\}$$ Αν $c_1=c_2=0$ τότε: $\lambda^2=a^2=b^2 \Rightarrow a=-b$

και από το μήκος του

ημικυκλίου $\frac{2\pi b}{2}=\ell \Rightarrow b=\frac{\ell}{\pi}$

<u>Άσκηση:</u> Να γίνει η γενική περίπτωση

<u>Ο συμβολισμός των μεταβολών</u>

Γνωρίζουμε ότι: $\frac{\partial J}{\partial a}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial a}\,dx$

Δηλαδή η μεταβολή

$$\delta J=\frac{\partial J}{\partial a}da=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial a}\,da\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,dx$$

Η συνθήκη για ακρότατο γράφεται:

$$\delta J=\delta\int_{x_1}^{x_2}f(y,y',x)\,dx=0$$

και άρα: $\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\delta f\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\right)dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,dx$$

που δηλώνει ότι αφού αυτό γίνεται για την τυχαία μεταβολή δy μπορούμε να εξάγουμε τη συνθήκη/εξίσωση Euler $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$